ENSEIGNEMENT DE PROMOTION SOCIALE

Cours de

STRUCTURE DES ORDINATEURS

- Binaire et Hexadécimal -

H. Schyns

Septembre 2005

Sommaire

1. Le système décimal

1.1. Les nombres entiers

Apprendre à compter est l'une des premières victoires du jeune enfant. C'est aussi l'un des signes les plus facilement mesurables de son évolution intellectuelle. Depuis notre plus jeune âge, nous sommes donc entraînés à jouer avec les nombres et avec leur notation décimale.

La notation décimale, ou système décimal, utilise dix signes pour représenter les nombres :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

C'est une notation de position, ce qui signifie que la valeur d'un chiffre dépend de la position qu'il occupe dans le nombre. Ainsi, le chiffre 3 dans 6523 représente 3 unités alors que, dans 3256, il représente 3 milliers.

$$6523 = \mathbf{6}\bullet 1000 + \mathbf{5}\bullet 100 + \mathbf{2}\bullet 10 + \mathbf{3}\bullet 1$$

En utilisant les notations en puissance, on a :

$$6523 = 6\bullet 10^3 + 5\bullet 10^2 + 2\bullet 10^1 + 3\bullet 10^0$$

Ecrit sous cette forme, le nombre 6523 apparaît comme la suite des coefficients d'un polynôme du troisième degré dans lequel 10 prend la place du "x" traditionnel :

$$n = 6\bullet x^3 + 5\bullet x^2 + 2\bullet x^1 + 3\bullet x^0$$

On peut retrouver les chiffres successifs d'un nombre décimal en divisant par 10 et en notant chaque fois le reste de la division :

6523	3
652	2
65	5
6	6
0	

Notez que les chiffres qui constituent le nombre de gauche à droite se retrouvent de bas en haut (et le plus grand chiffre que l'on puisse écrire sur 4 positions est 9999).

Réciproquement, puisque le nombre est l'expression d'un polynôme dans lequel x vaut 10, on peut utiliser la technique de Horner pour le reconstituer.

On construit un tableau de trois lignes et d'autant de colonnes qu'il y a de termes dans le polynôme (ici 4). On note la suite des coefficients dans la première ligne. Dans chaque colonne, la troisième cellule est la somme des deux cellules situées au-dessus (flèche verticale). La deuxième cellule d'une colonne est le produit de la cellule inférieure de la colonne précédente et de la valeur donnée à "x" (ici 10) :

	6	5	2	3
10		60	650	6520
	6	65	652	**6523**

1.2. Les nombres décimaux

Les nombres décimaux contiennent un certain nombre de chiffres, appelés **décimales**, situés à la droite d'une virgule qui indique la position des unités.

Ainsi, le nombre 6523,479 contient une partie entière (6523) et une partie décimale (0,479). La partie décimale est aussi appelée partie fractionnaire car elle peut se mettre sous la forme d'une fraction (au moins de manière approchée) :

$$0.479 = \frac{479}{1000}$$

Notez que le dénominateur compte autant de zéros qu'il y a de chiffres après la virgule.

Comme pour la partie entière, lorsque l'on se dirige vers la droite, chaque rang représente un coefficient de 10 dix fois plus petit que celui du rang précédent :

$$0{,}479 = \mathbf{4} \bullet 0{,}1 + \mathbf{7} \bullet 0{,}01 + \mathbf{9} \bullet 0{,}001$$

$$0{,}479 = 4 \bullet \frac{1}{10} + 7 \bullet \frac{1}{100} + 9 \bullet \frac{1}{1000}$$

En utilisant les notations en puissance, on a :

$$0.479 = 4 \bullet 10^{-1} + 7 \bullet 10^{-2} + 9 \bullet 10^{-3}$$

On peut retrouver les chiffres successifs de la partie fractionnaire d'un nombre décimal en ***multipliant*** par 10 et isolant chaque fois le nombre qui passe devant la virgule :

$$\begin{array}{c|l} 0 & 479 \\ \hline 4 & 79 \\ 7 & 9 \\ 9 & \end{array}$$

Notez que les chiffres qui constituent le nombre de gauche à droite se retrouvent de haut en bas.

Tout ceci peut sembler trivial et inutile et pourtant, ce sont exactement les mêmes mécanismes qui nous allons mettre en œuvre pour les notations binaire et hexadécimale.

2. Le système binaire

2.1. Les nombres entiers

Alors que le système décimal utilisait dix signes pour représenter les nombres, le système binaire n'en compte plus que deux :

0, 1.

Il s'agit toujours d'une notation de position, mais les différents rangs représentent maintenant les puissances successives de 2 :

$$1011011 = 1 \bullet 2^6 + 0 \bullet 2^5 + 1 \bullet 2^4 + 1 \bullet 2^3 + 0 \bullet 2^2 + 1 \bullet 2^1 + 1 \bullet 2^0$$

$$1011011 = \mathbf{1} \bullet 64 + \mathbf{0} \bullet 32 + \mathbf{1} \bullet 16 + \mathbf{1} \bullet 8 + \mathbf{0} \bullet 4 + \mathbf{1} \bullet 2 + \mathbf{1} \bullet 1$$

$$1011011 = 64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 91$$

Chaque position d'un nombre binaire s'appelle un **bit**. Le nombre 1011011 est un nombre de 7 bits.

Le nombre 1011011 peut aussi être vu comme la suite des coefficients d'un polynôme du sixième degré dans lequel c'est la valeur 2 qui prend cette fois la place du "x" traditionnel :

$$n = \mathbf{1} \bullet x^6 + \mathbf{0} \bullet x^5 + \mathbf{1} \bullet x^4 + \mathbf{1} \bullet x^3 + \mathbf{0} \bullet x^2 + \mathbf{1} \bullet x^1 + \mathbf{1} \bullet x^0$$

Transformer un nombre décimal en nombre binaire est un jeu d'enfant : il suffit de le diviser successivement par 2 en notant à chaque étape le reste de la division. En d'autres mots, il suffit de noter 1 si le nombre que l'on s'apprête à diviser est impair et 0 s'il est pair :

91	1
45	1
22	0
11	1
5	1
2	0
1	1
0	

Les chiffres qui constituent le nombre binaire de gauche à droite se retrouvent de bas en haut, exactement comme dans la décomposition décimale faite au point précédent :

91 = 1011011

De même, puisque tout nombre binaire est l'expression d'un polynôme dans lequel x vaut 2, on peut utiliser la technique de Horner pour reconstituer sa valeur décimale :

	1	0	1	1	0	1	1
2		2	4	10	22	44	90
	1	2	5	11	22	45	**91**

Le plus grand chiffre que l'on puisse écrire dans un octet ou byte est :

$$11111111 = 255 = 2^8 - 1$$

2.2. Les nombres fractionnaires

Les nombres binaires peuvent aussi comprendre une partie fractionnaire située après la virgule :

1011011,10011

Pour ramener la partie fractionnaire, située derrière la virgule, dans une forme décimale, il suffit de se souvenir qu'elle peut aussi se mettre sous la forme d'une fraction. Le dénominateur compte autant de zéros qu'il y a de chiffres après la virgule, exactement comme dans le cas du nombre décimal, mais cette fois, il s'agit d'un nombre binaire :

$$0{,}10011 = \frac{10011_b}{100000_b} = \frac{19_d}{32_d} = 0{,}59375$$

En effet, lorsque l'on se dirige vers la droite, chaque rang représente un coefficient de 2 deux fois plus petit que celui du rang précédent :

$$0{,}10011 = \mathbf{1} \bullet \frac{1}{2} + \mathbf{0} \bullet \frac{1}{4} + \mathbf{0} \bullet \frac{1}{8} + \mathbf{1} \bullet \frac{1}{16} + \mathbf{1} \bullet \frac{1}{32}$$

En utilisant les notations en puissance, on a :

$$0{,}10011 = 1 \bullet 2^{-1} + 0 \bullet 2^{-2} + 0 \bullet 2^{-3} + 1 \bullet 2^{-4} + 1 \bullet 2^{-5}$$

Transformer la partie fractionnaire d'un nombre décimal en binaire n'est pas plus compliqué que dans le cas de la partie entière. Il suffit de multiplier la partie décimale par 2, d'isoler chaque fois la partie qui passe devant la virgule et de reprendre l'opération avec la nouvelle partie fractionnaire :

0	59375
1	1875
0	3750
0	7500
1	5000
1	0000

Les chiffres binaires qui constituent la partie fractionnaire de gauche à droite se retrouvent de haut en bas, exactement comme dans la décomposition décimale faite au point précédent :

$$0{,}59375_d = 0{,}10011_b$$

Par conséquent, pour transformer un nombre décimal tel que 91,59375 en binaire, il suffit de convertir la partie entière d'une part, la partie décimale d'une autre et de recoller les deux morceaux :

$$91{,}59375_d = 91_d + 0{,}59375_d = 1011011_b + 0{,}10011_b = 1011011{,}10011_b$$

Notons qu'il est assez rare qu'un nombre décimal se transforme en un nombre fini de "décimales binaires". En général, on tombe sur une forme périodique infinie. Un exemple remarquable est la conversion de $0{,}1_d$:

0	1
0	2
0	4
0	6
1	**2**
0	4
0	8
1	6
1	**2**

$$0{,}1_d = 0{,}000\mathbf{1001}1001\mathbf{1001}1001\mathbf{1001}1001\ldots_b$$

Ceci vient du fait, que hormis 1, il n'y a aucune puissance de 10 qui corresponde exactement à une puissance de 2.

3. Le système hexadécimal

3.1. Origine et symbôles

Le système binaire est pratique du point de vue technique : chaque bit peut être facilement traduit dans un langage électrique (courant circule ou non, lampe allumée ou non, condensateur chargé ou non, etc.) ou dans un langage magnétique (aimantation N-S ou S-N) ce qui en fait le système de codage de prédilection du monde informatique.

Malheureusement, l'écriture d'un nombre binaire prend beaucoup de place et sa lecture par l'œil humain n'est pas très commode et présente de grands risques d'erreur.

On s'est donc tourné vers un système plus compact : le système hexadécimal. Le système hexadécimal utilise 16 chiffres pour coder les nombres :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

avec

A = 10 B = 11 C = 12 D = 13 E = 14 F = 15

Pourquoi avoir choisi A..F pour représenter 10..15 ? Parce que dans un système de notation de position, chaque chiffre ne peut utiliser qu'un seul rang alors que 10..15 en occupent deux. Sinon, en lisant le nombre 12345, le lecteur ne saurait pas s'il doit lire 1_2_3_4_5 ou 12_03_04_05.

3.2. Codage et décodage

Transformer un nombre binaire (entier) en nombre hexadécimal est un jeu d'enfant : il suffit de grouper les bits **par paquets de 4** en commençant par le **point décimal** et en se dirigeant vers la **gauche** (on ajoute éventuellement des zéros pour remplir le paquet le plus à gauche). On code ensuite chaque paquet :

91 =1011011
91 = 0101 1011
91 = $5B_h$

Dans cet exemple, 0101 est le code binaire de 5 tandis que 1011 représente la valeur décimale 11, soit B en hexadécimal. Tout informaticien digne de ce nom à intérêt à apprendre par cœur la table suivante :

Déc	Hex	Bin	Déc	Hex	Bin
0	0	0000	8	8	1000
1	1	0001	9	9	1001
2	2	0010	10	A	1010
3	3	0011	11	B	1011
4	4	0100	12	C	1100
5	5	0101	13	D	1101
6	6	0110	14	E	1110
7	7	0111	15	F	1111

Comme chaque byte ou octet est un groupe de 8 bits et que la notation hexadécimale utilise des groupes de 4 bits, on peut mettre *deux chiffres hexa dans un byte*. Le plus grand chiffre hexa que l'on puisse écrire dans byte est :

$FF = 255 = 16^2 - 1$

Pour la partie fractionnaire, on suit presque le même principe : part du **point décimal** et on se dirige **vers la droite** en faisant des paquets de 4 bits. On ajoute éventuellement des zéros pour remplir le paquet le plus à droite :

$$0{,}10011_b = 0{,}1001\ 1000 = 0{,}98_h$$

De la même manière

$$91{,}59375_d = 5B{,}98_h$$

Puisque tout nombre hexadécimal est l'expression d'un polynôme dans lequel x vaut 16, on peut aussi utiliser la technique de Horner pour reconstituer la valeur décimale :

Hex	5	B
Déc	*5*	*11*
16		80
	5	**91**

$$5B = \mathbf{5}\bullet 16^1 + \mathbf{B}\bullet 16^0$$

Pour la partie située derrière la virgule, on se ramène à l'expression fractionnaire :

$$0{,}98_h = \frac{98_h}{100_h} = \frac{152_d}{256_d} = 0{,}59375$$

Une petite note philosophique pour terminer : si vous avez un enfant en âge d'école en train d'étudier ses tables de multiplications, soyez patient et indulgent. Vous pouvez facilement vous rendre compte de l'effort intellectuel que ça représente pour lui : essayez un peu d'apprendre par cœur les tables de multiplications hexadécimales pour voir ! A titre d'exemple, voici les premières… mais il y en a 16 en tout.

```
 1 x 2 =  2     1 x 3 =  3     1 x 4 =  4     1 x 5 =  5
 2 x 2 =  4     2 x 3 =  6     2 x 4 =  8     2 x 5 =  A
 3 x 2 =  6     3 x 3 =  9     3 x 4 =  C     3 x 5 =  F
 4 x 2 =  8     4 x 3 =  C     4 x 4 = 10     4 x 5 = 14
 5 x 2 =  A     5 x 3 =  F     5 x 4 = 14     5 x 5 = 19
 6 x 2 =  C     6 x 3 = 12     6 x 4 = 18     6 x 5 = 1E
 7 x 2 =  E     7 x 3 = 15     7 x 4 = 1C     7 x 5 = 23
 8 x 2 = 10     8 x 3 = 18     8 x 4 = 20     8 x 5 = 28
 9 x 2 = 12     9 x 3 = 1B     9 x 4 = 24     9 x 5 = 2D
 A x 2 = 14     A x 3 = 1E     A x 4 = 28     A x 5 = 32
 B x 2 = 16     B x 3 = 21     B x 4 = 2C     B x 5 = 37
 C x 2 = 18     C x 3 = 24     C x 4 = 30     C x 5 = 3C
 D x 2 = 1A     D x 3 = 27     D x 4 = 34     D x 5 = 41
 E x 2 = 1C     E x 3 = 2A     E x 4 = 38     E x 5 = 46
 F x 2 = 1E     F x 3 = 2D     F x 4 = 3C     F x 5 = 4B
10 x 2 = 20    10 x 3 = 30    10 x 4 = 40    10 x 5 = 50
```

Ceci dit, la calculatrice de Windows effectue sans problèmes toutes les opérations et conversions décimales, binaires, octales (base 8) et hexadécimales *entières* à condition de demander l'affichage scientifique.

Exercices du chapitre

♦ Exercice 1

En vous servant de vos 10 doigts et en utilisant la notation binaire, jusqu'à quel nombre pouvez-vous compter ?

♦ Exercice 2

Ecrire les nombres suivants en notation binaire puis en notation hexadécimale :

8, 15, 64, 123, 250, 6485, 31845

♦ Exercice 3

Ecrire les nombres hexadécimaux suivants en notation décimale :

7F, A0, 200, 67CC, BA21, EDCBA

♦ Exercice 4

Quel est le plus grand nombre hexadécimal (et sa valeur décimale) que l'on peut écrire dans un byte, un mot, un double mot ?

♦ Exercice 5

Démontrer que tous les nombres binaires qui se terminent par 000 sont divisibles par 8 et que tous les nombres hexadécimaux qui se terminent par 00 sont divisibles par 256.